Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-\left(1-i\sqrt{3}\right)^2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-2x$. Arătați că $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}=2$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere impare.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CA}$. Știind că O este un punct oarecare din plan, arătați că $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Știind că $x\in(\pi,2\pi)$ și $\cos 2x=\dfrac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+2z=4\\ 3x+ay+2z=1\\ 2x+ay+5z=b\end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=-3$.

5p **b)** Pentru $a=-1$ și $b=-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x, y\in G$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:M\to G$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n}$.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-x\right)dx = 2\ln 2$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e \left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\frac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a$, unde F este primitiva funcției f pentru care $F(0)=0$.