Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați suma elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\le\sqrt{5}\}$.

5p **2.** Determinați numerele reale m și n, știind că $f(1)=2$ și $f(2)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+n$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x+2\cdot 4^x-8=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor un număr prim.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul O, intersecția diagonalelor acestuia. Arătați că $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Determinați $\sin x$, știind că $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ și $\cos x=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ a-3 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=x+y-\frac{xy}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=\frac{26}{9}$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „$*$” sunt numere naturale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru fiecare număr natural n, $n\ge 2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx = 2(e-3)^2$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=0$.